全品
教辅图书 功能学具 学生之家
基础教育行业专研品牌

30+年创始人专注教育行业

全品学练考

AI智慧教辅

主编 肖德好

导学案

高中数学

必修第三册 RJB

本书为AI智慧教辅

“讲课智能体”支持学生聊着学，扫码后哪里不会选哪里；随时随地想聊就聊，想问就问。

江西美術出版社
全国百佳图书出版单位

CONTENTS 目录 导学案

07 第七章　三角函数
PART SEVEN

7.1　任意角的概念与弧度制 …… 107
7.1.1　角的推广 …… 107
7.1.2　弧度制及其与角度制的换算 …… 111
7.2　任意角的三角函数 …… 114
7.2.1　三角函数的定义 …… 114
7.2.2　单位圆与三角函数线 …… 116
7.2.3　同角三角函数的基本关系式 …… 119
7.2.4　诱导公式 …… 122
第1课时　诱导公式（一） …… 122
第2课时　诱导公式（二） …… 125
7.3　三角函数的性质与图象 …… 128
7.3.1　正弦函数的性质与图象 …… 128
第1课时　正弦函数的性质 …… 128
第2课时　正弦函数的图象 …… 132
7.3.2　正弦型函数的性质与图象 …… 134
第1课时　正弦型函数的性质与图象（一） …… 134
第2课时　正弦型函数的性质与图象（二） …… 139
7.3.3　余弦函数的性质与图象 …… 145
7.3.4　正切函数的性质与图象 …… 148
7.3.5　已知三角函数值求角 …… 152
7.4　数学建模活动：周期现象的描述 …… 155
本章总结 …… 157

08 第八章　向量的数量积与三角恒等变换
PART EIGHT

8.1　向量的数量积 …… 162
8.1.1　向量数量积的概念 …… 162
8.1.2　向量数量积的运算律 …… 165
8.1.3　向量数量积的坐标运算 …… 167
8.2　三角恒等变换 …… 170
8.2.1　两角和与差的余弦 …… 170
8.2.2　两角和与差的正弦、正切 …… 172
8.2.3　倍角公式 …… 174
8.2.4　三角恒等变换的应用 …… 177
第1课时　三角函数式的化简与求值 …… 177
第2课时　三角恒等变换公式的应用 …… 180
本章总结 …… 182

◆ 参考答案 …… 185

第七章　三角函数

7.1　任意角的概念与弧度制

7.1.1　角的推广

【学习目标】

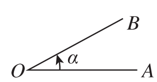
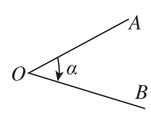
1. 了解任意角的概念，能区分正角、负角与零角；
2. 理解并掌握终边相同的角的含义及其表示方法；
3. 掌握象限角的概念并能用集合表示各类象限角及区域角.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ 知识点一　角的概念的推广

1. 任意角的概念：一条射线绕其________旋转到另一条射线所形成的图形称为角，这两条射线分别称为角的________和________.

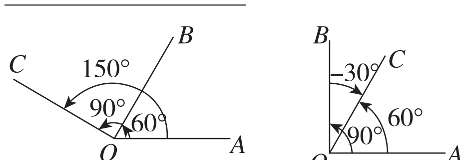
2. 角的分类

类型	定义	图示
正角	按照________方向旋转而成的角	
负角	按照________方向旋转而成的角	
零角	射线________旋转	

3. 角的加减运算及其几何意义

(1)角的加法的几何意义

如图①所示，射线 OA 逆时针方向旋转到 OB 所形成的角为 $60°$，OB 逆时针方向旋转到 OC 所形成的角为 $90°$，则 OA 逆时针方向旋转到 OC 所形成的角为____________.



①　　②

(2)角的减法的几何意义

如图②所示，射线 OA 逆时针方向旋转到 OB 所形成的角为 $90°$，OB 顺时针方向旋转到 OC 所形成的角为 $-30°$，则 OA 逆时针方向旋转到 OC 所形成的角为____________.

【诊断分析】1. 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)经过 15 分钟，钟表的分针转过的角度为 $90°$.　(　　)

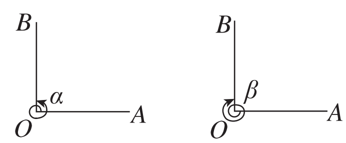
(2)两个角的始边相同，那么这两个角的始边和终边的张角越大，对应的角越大.　(　　)

(3)一条射线也可以看成一个角.　(　　)

(4)角的始边不变，角的终边按逆时针方向旋转，角变大，角的终边按顺时针方向旋转，角变小.　(　　)

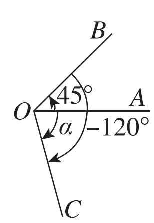
(5)若角的始边和终边重合，则该角为零角.　(　　)

2. 图中 $\alpha=450°$，$\beta=-630°$，如果不标明旋转方向，那么这两个角还是 $450°$ 和 $-630°$ 吗？如果把图中表示旋转的绝对量的弧去掉，那么这两个角具有怎样的关系？



(1)　　(2)

3. 如图，射线 OA 绕顶点 O 逆时针旋转 $45°$ 到 OB 位置，并在此基础上顺时针旋转 $120°$ 到达 OC 位置，则 $\alpha=$________.



◆ 知识点二　象限角

1. 象限角定义：____________与坐标原点重合，角的______落在 x 轴的正半轴上. 这时，角的________在第几象限，就把这个角称为第几象限角.

2. 终边在坐标轴上的角(轴线角):在平面直角坐标系中,角的顶点与坐标原点重合,角的始边落在 x 轴的正半轴上,角的终边在______上,就认为这个角不属于任何象限,可称为轴线角.

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)锐角是第一象限角,钝角是第二象限角,反之也成立. ( )

(2)小于 $90°$ 的角是锐角,也是第一象限角. ( )

(3)若角 α 的顶点与坐标原点重合,始边落在 x 轴的正半轴上,终边经过点 $A(-1,2)$,则角 α 是第二象限角. ( )

(4)若角 α 大于 $0°$ 小于 $180°$,则角 α 是第一象限角或第二象限角. ( )

◆ 知识点三 终边相同的角

1. 终边相同角的定义:一般地,角__________与角 α 的终边相同,这只需把 $k\cdot 360°$ 看成逆时针或者顺时针方向旋转若干周即可. 任意两个终边相同的角,它们的差一定是 $360°$ 的______倍. 因此,所有与 α 终边相同的角组成一个集合,这个集合可记为 $S=$__________.

2. 象限角与终边在坐标轴上的角(轴线角)的表示:

(1)象限角的集合表示

象限角	角 α 的集合表示
第一象限角	______
第二象限角	______
第三象限角	______
第四象限角	______

(2)轴线角的集合表示

角 β 的终边位置	角 β 的集合表示
x 轴正半轴	$\{\beta\mid\beta=k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$
x 轴负半轴	$\{\beta\mid\beta=k\cdot 360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$
x 轴	$\{\beta\mid\beta=k\cdot 180°,k\in\mathbf{Z}\}$
y 轴正半轴	$\{\beta\mid\beta=k\cdot 360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$
y 轴负半轴	$\{\beta\mid\beta=k\cdot 360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$
y 轴	$\{\beta\mid\beta=k\cdot 180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$

【诊断分析】 1. 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)与 $90°$ 角终边相同的角为 $-270°$. ( )

(2)角 $30°+k\cdot 180°(k\in\mathbf{Z})$ 表示与 $30°$ 角终边相同的角. ( )

(3)角 $30°+(2k-1)\cdot 180°(k\in\mathbf{Z})$ 表示与 $30°$ 角终边互为反向延长线的角. ( )

(4)集合 $\{\alpha\mid k\cdot 360°+270°<\alpha<k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$ 中的元素所表示的角是第四象限角. ( )

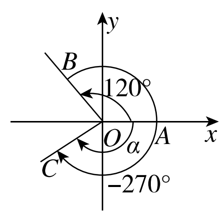
2. 如何区分"角 $\alpha+k\cdot 180°(k\in\mathbf{Z})$"和"角 $\alpha+k\cdot 360°(k\in\mathbf{Z})$"?

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 任意角的概念

例 1 (1)已知 O 为坐标原点,且射线 OA 的始边与 x 轴的正半轴重合,若射线 OA 绕端点 O 逆时针旋转 $120°$ 到达 OB 的位置,OB 顺时针旋转 $270°$ 到达 OC 的位置,则 $\alpha=$ ( )



A. $150°$ B. $-150°$

C. $390°$ D. $-390°$

(2)体操运动员按照逆时针方向旋转 $360°$ 而成的角是______. 若将钟表拨快 10 分钟,则时针旋转了______,分针旋转了______.

(3)一条射线绕端点旋转,旋转的圈数越多,则这个角越大,这样说对吗?

[素养小结]

判断角度时,要注意以下几点:(1)确定未作任何旋转时的位置;(2)旋转的方向;(3)旋转的绝对量.

◆ 探究点二　终边相同的角

[探索] 相等角的终边一定相同吗？终边相同的角一定相等吗？

例 2 (1)(多选题)[2024·太原高一期末] 下列选项中，与$-60°$角终边相同的角有　　(　　)

A. $60°$　　B. $-420°$

C. $240°$　　D. $300°$

(2)终边在第一、三象限的角平分线上的角β的集合$S=$________.

变式 若角α,β的终边相同，则$\alpha-\beta$的终边落在　　(　　)

A. x轴的正半轴上

B. x轴的负半轴上

C. x轴上

D. y轴的正半轴上

[素养小结]

(1)写出终边相同的角的集合的一般步骤：

①写出在$[0°,360°)$内相应的角；

②由终边相同的角的表示方法写出角的集合；

③根据条件，能合并的集合一定要合并，使结果简洁.

(2)终边问题常用的三个结论：

①终边相同的角之间相差$360°$的整数倍；

②终边在同一条直线上的角之间相差$180°$的整数倍；

③终边在相互垂直的两直线上的角之间相差$90°$的整数倍.

◆ 探究点三　象限角的判断

[探索] 已知角α的终边在第四象限，则α的取值范围为________.

例 3 (1)[2024·江苏连云港高一月考] 如果α是第三象限角，则$-\frac{\alpha}{2}$是　　(　　)

A. 第一象限角

B. 第一或第二象限角

C. 第一或第三象限角

D. 第二或第四象限角

(2)若α是第一象限角，则下列各角为第四象限角的是　　(　　)

A. $90°-\alpha$　　B. $90°+\alpha$

C. $360°-\alpha$　　D. $360°+\alpha$

变式 (1)(多选题)下列各角是第二象限角的是　　(　　)

A. $-120°$　　B. $180°$

C. $-240°$　　D. $495°$

(2)若角α是第一象限角，则角$\frac{\alpha}{3}$的终边落在________.

[素养小结]

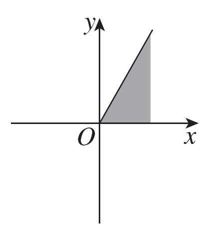
(1)判断象限角α的方法：①若角α为$[0°,360°)$内的角，则其终边与坐标系中过原点的射线可建立一一对应的关系，易于判断象限角；②若角α为$[0°,360°)$之外的角，则可以通过$\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$将角$\alpha$转化到$[0°,360°)$内的角$\beta$，因为终边相同的角所属的象限相同，所以判断角$\beta$的终边所在的象限即可.

(2)一般地，要确定$\frac{\alpha}{n}$的终边所在的象限，可以先把各个象限都n等分，再从x轴正半轴的上方起，按逆时针方向把这$4n$个区域依次循环标上号码1,2,3,4，则标号是几的区域就是α为第几象限角时$\frac{\alpha}{n}$的终边所在的区域，$\frac{\alpha}{n}$的终边所在的象限就可以直观地看出.

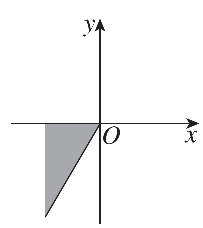
◆ 探究点四　区域角的表示

[探索] 已知角α的终边在x轴的正半轴与第一象限的角平分线之间，则角α的范围为________.

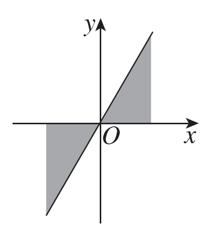
例 4 (1)集合$M=\{\alpha\mid k\cdot180°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot180°+60°,k\in\mathbf{Z}\}$中的角所表示的范围(阴影部分)是　　(　　)



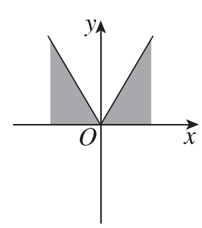
A



B



C



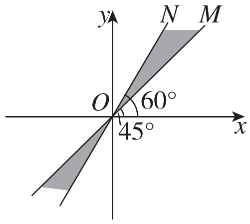
D

(2)如图,分别写出适合下列条件的角的集合:

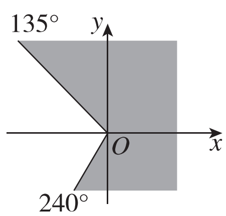
①终边落在射线 OM 上;

②终边落在直线 OM 上;

③终边落在阴影区域内(含边界).



变式 如图所示,终边落在阴影部分内(包括边界)的角 α 的集合为________________.



[素养小结]

表示区域角的三个步骤:

第一步:按照逆时针方向找到区域的起始边界和终止边界;

第二步:按由小到大的顺序分别标出起始边界和终止边界对应的在$[-180°,180°)$(或$[0°,360°)$)内的角 α 和 β,写出最简区间(注意是否包含边界),其中 $\beta-\alpha<360°$;

第三步:区域的起始边界、终止边界对应角 α,β 加上 $k\cdot 360°(k\in \mathbf{Z})$ 即得区域角的集合,对顶区域起始边界、终止边界对应角 α,β 加上 $k\cdot 180°(k\in \mathbf{Z})$ 即得区域角的集合.

课堂评价

知识评价　素养形成

1. 若角 2α 与 $220°$ 角的终边相同,则 $\alpha=$　　(　　)

A. $110°+k\cdot 360°(k\in \mathbf{Z})$

B. $110°+k\cdot 180°(k\in \mathbf{Z})$

C. $220°+k\cdot 360°(k\in \mathbf{Z})$

D. $220°+k\cdot 180°(k\in \mathbf{Z})$

2. [2024·湖南师大附中高一期末] 下列说法正确的是　　(　　)

A. 小于 $90°$ 的角是锐角

B. 第二象限的角一定大于第一象限的角

C. 与 $-2024°$ 角终边相同的最小正角是 $136°$

D. 若 $\alpha=-100°$,则 α 是第四象限角

3. 设集合 $M=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{2k-1}{4}\cdot 180°,k\in \mathbf{Z}\right\}$,$N=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{4k\pm 1}{4}\cdot 180°,k\in \mathbf{Z}\right\}$,则集合 M,N 的关系为　　(　　)

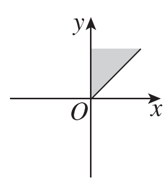
A. $M\subseteq N$

B. $M=N$

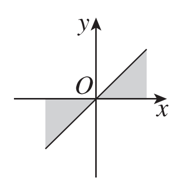
C. $N\subseteq M$

D. 无法确定

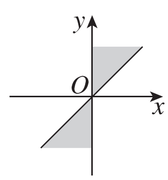
4. 集合$\{\alpha\,|\,k\cdot 180°+45°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot 180°+90°,k\in \mathbf{Z}\}$中的角 α 表示的范围(用阴影表示)所对应的图形是　　(　　)



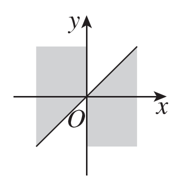
A



B



C



D

5. 已知两个齿轮是互相啮合的,大齿轮有 64 齿,小齿轮有 24 齿.当小齿轮转动 $360°$ 时,大齿轮转动的角度为________.

7.1.2　弧度制及其与角度制的换算

【学习目标】

1. 能够熟练地进行角度与弧度的互化，掌握常用特殊角的弧度制表示；
2. 能用弧度制表示终边相同的角；
3. 掌握用弧度制表示的扇形的弧长公式和面积公式.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ 知识点一　弧度制

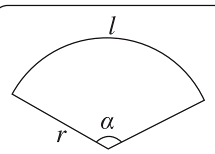
1. 角度制的定义：把圆周等分成 360 份，其中每一份所对应的圆心角为 1 度，用________作单位来度量角的制度称为角度制. 角度制规定 1 度等于 60 分，1 分等于 60 秒.

2. 弧度制的定义：弧长与半径比值的这个常数称为圆心角的弧度数. 长度等于________的圆弧所对的圆心角为 1 弧度的角，记作 1 rad，以弧度为单位来度量角的制度称为弧度制.

3.

弧度数
- 正角的弧度数是一个___数
- 负角的弧度数是一个___数
- 零角的弧度数是___

弧度数的计算 →



$\alpha=$___

4. 弧度制与角度制的区别与联系

区别	(1)单位不同，弧度制以“弧度”为度量单位，角度制以“度”为度量单位；(2)定义不同
联系	不管以“弧度”还是以“度”为单位的角的大小都是一个与圆的半径大小无关的定值

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)1 rad 的角和 1°的角大小相等.　(　　)

(2)用弧度来表示的角都是正角.　(　　)

(3)不论是以“弧度”为单位还是以“度”为单位的角的大小都是一个与圆的半径大小无关的值，仅与圆心角所对的弧长与半径的比值有关.　(　　)

(4)$\alpha=60$ 表示 α 是 60 rad 的角.　(　　)

◆ 知识点二　弧度制与角度制的换算

1. 弧度制与角度制的互化(换算)

角度化弧度：

$360°=$___rad　↔　___rad$=360°$

$180°=$___rad　↔　___rad$=180°$

$1°=$___rad　↔　1 rad$=$___

弧度化角度

度数$\times\frac{\pi}{180}=$弧度数　　弧度数$\times\frac{180}{\pi}=$度数

2. 特殊角的角度数与弧度数对应如下表，请填写完整.

角度	0°	15°	30°	45°	___	75°	90°	___	135°	___
弧度	___	___	___	___	$\frac{\pi}{3}$	___	___	$\frac{2\pi}{3}$	___	$\frac{5\pi}{6}$
角度	180°	210°	225°	___	___	___	315°	330°	360°	
弧度	___	___	___	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	___	___	___	

【诊断分析】1. 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)“度”与“弧度”是度量角的两种不同的度量单位.　(　　)

(2)1°的角是周角的$\frac{1}{360}$，1 rad 的角是周角的$\frac{1}{2\pi}$.　(　　)

(3)1°的角是 1 rad 的角的$\frac{\pi}{180}$.　(　　)

(4)角度制和弧度制在角的集合与实数集 **R** 之间建立了一种一一对应关系.　(　　)

2. 与 30°角终边相同的角的集合写为 $A=\{\alpha\mid\alpha=30°+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，终边在直线 $y=x$ 与 $y=-x$ 上的角的集合写为 $B=\left\{\beta\,\middle|\,\beta=\frac{\pi}{4}+k\cdot 90°,k\in\mathbf{Z}\right\}$. 这两种表示方法正确吗？为什么？

◆ 知识点三　扇形的弧长公式与面积公式

设扇形的半径为 r，弧长为 l，$\alpha(0<\alpha<2\pi)$或 $n°$为其圆心角，则扇形的弧长公式与面积公式如下：

	角度制	弧度制
扇形的弧长公式	$l=\frac{n\pi r}{180}$	$l=\alpha r$
扇形的面积公式	$S=\frac{n\pi r^2}{360}$	$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\alpha r^2$

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)弧长公式 $l=\alpha r$ 中的角可以是弧度，也可以是角度.　(　)

(2)若扇形的圆心角是 72°，半径是 5，则它的弧长为 2π，面积为 5π.　(　)

(3)若扇形的圆心角为 α rad，则 α 可以为负数.　(　)

课中探究　考点探究　素养小结

◆ 探究点一　弧度制的概念

[探索] 在半径不同的圆中，1 弧度的角的大小是否相等？

例 1 (1)下列说法中正确的是　(　)

A. 1 弧度就是 1 度的圆心角所对的弧

B. 1 弧度是长度为半径长的弧

C. 1 弧度是 1 度的弧与 1 度的角之和

D. 1 弧度是长度等于半径长的弧所对的圆心角的大小

(2)下列说法中正确的是　(　)

A. 在弧度制下，角的集合与正实数集之间建立起一一对应的关系

B. 每个用弧度制表示的角，都有唯一的用角度制表示的角与之对应

C. 用角度制和弧度制度量任意一个角，单位不同，数量也不同

D. $-120°$对应的弧度数是$\frac{2\pi}{3}$

[素养小结]

弧度制的引入便于角度与长度之间建立联系，当应用弧度制时，角度的大小可以直接用$\frac{l}{r}$来表示(l 表示弧长，r 为扇形所在圆的半径).

◆ 探究点二　角度制与弧度制的互化

[探索] (1)在同一个式子中，角度制与弧度制能否混用？为什么？

(2)我们上节课所学习的任意角，用角度制能否与实数建立一一对应的关系？

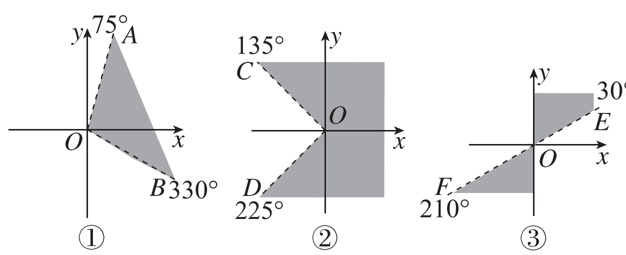
例 2 设 $\alpha_1=-570°$，$\alpha_2=750°$，$\beta_1=\frac{3}{5}\pi$，$\beta_2=-\frac{7}{3}\pi$.

(1)将 α_1，α_2 用弧度制表示出来，并指出它们各自的终边所在的象限；

(2)将 β_1，β_2 用角度制表示出来，并在集合$\{\beta\mid -720°\leqslant\beta<0°\}$中找出分别与 β_1，β_2 的终边相同的所有角.

变式 (1)将 $-1125°$角写成 $\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$的形式，在$[-4\pi,4\pi]$内写出所有与 α 终边相同的角组成的集合.

(2)用弧度制表示顶点与坐标原点重合，始边落在 x 轴的正半轴上，终边落在如图所示的阴影部分内(不包括边界)的角 θ 的集合.



[素养小结]

(1)当进行角度制与弧度制的互化时,要牢记 $180^\circ=\pi$ rad,并充分利用 $1^\circ=\frac{\pi}{180}$ rad 和 1 rad$=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$进行互化.

(2)在同一个式子中,角度与弧度不能混合用,必须保持单位统一.

◆ 探究点三　扇形的弧长公式和面积公式的应用

例 3 (1)[2024·江西宜春高一期末] 已知扇形的面积为 4,圆心角为 2 弧度,则此扇形的弧长为 (　　)

A. 4　　B. 6

C. 8　　D. 10

(2)若半径为 2 的扇形的弧长为$\frac{4\pi}{3}$,则该扇形的圆心角所对的弦长为 (　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. 2

C. $2\sqrt{3}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

变式 [2025·江苏连云港高一期中] 已知一个扇形的圆心角为 α,半径为 R,弧长为 l.

(1)若 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$,$R=10$ cm,求扇形的弧长 l;

(2)若扇形的周长为 10 cm,面积是 4 cm^2,求扇形的圆心角;

(3)若扇形的周长为 20 cm,当扇形的圆心角 α 为多少弧度时,这个扇形的面积最大?

[素养小结]

用弧度制解决扇形相关问题的一般步骤:

(1)明确弧长公式和扇形的面积公式:$l=\alpha r$,$S=\frac{1}{2}\alpha r^2=\frac{1}{2}lr$(这里 α 必须是弧度制下的角);

(2)分析题目中哪些是已知量,哪些是待求量,灵活选择公式;

(3)根据条件列方程(组)求解.

课堂评价

知识评价　素养形成

1. [2024·陕西榆林高一期末] 已知现在的时刻为 4:30,设 150 分钟后时针与分针的夹角为 α $(0<\alpha\leqslant\pi)$,则 $\alpha=$ (　　)

A. $\frac{11\pi}{12}$　　B. $\frac{5\pi}{6}$

C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

2. 已知集合 $M=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$,$P=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$,则 (　　)

A. $M=P$

B. $M\subsetneqq P$

C. $M\supsetneqq P$

D. $M\cap P=\varnothing$

3. 把$-\frac{11}{4}\pi$表示成 $\theta+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$的形式,使$|\theta|$最小的 θ 的值是 (　　)

A. $-\frac{3\pi}{4}$　　B. $-\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{3\pi}{4}$

4. [2024·浙江嘉兴高一期末] 一个扇形的弧长和面积都是$\frac{2\pi}{3}$,则这个扇形的半径为________.

5. 在半径为 1 的圆中,长度为$\sqrt{3}$的弦所对的劣弧长是________.

7.2 任意角的三角函数

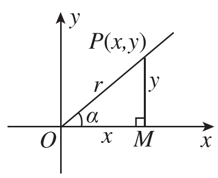
7.2.1 三角函数的定义

【学习目标】

1. 理解任意角的三角函数(正弦、余弦、正切)的定义；
2. 能够根据定义求任意角的三角函数值；
3. 能够判断三角函数在各个象限的符号.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ 知识点一 任意角的正弦、余弦与正切的定义

前提		如图,设 α 是一个任意角,$P(x,y)$ 是 α 终边上异于原点的任意一点,$r=\sqrt{x^2+y^2}$ 
定义	正弦	把 $\frac{y}{r}$ 称为角 α 的正弦,记作________,即________
	余弦	把 $\frac{x}{r}$ 称为角 α 的余弦,记作________,即________
	正切	把 $\frac{y}{x}$ 称为角 α 的正切,记作________,即________
	三角函数	对于每一个角 α,都有唯一确定的________与之对应;当 $\alpha\neq$________时,有唯一的正切与之对应.角 α 的正弦、余弦与正切,都称为 α 的三角函数

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)两个角的终边相同,则它们的正弦值一定相等,余弦值一定相等. ( )

(2)三角函数值的大小只与角的终边在坐标系内的位置有关,与终边上选取的点的位置无关. ( )

(3)若 $\sin\alpha=\sin\beta$,则 $\alpha=\beta$. ( )

(4)若角 α 终边上的点 P 的坐标为 (x,y),$r=OP\neq0$(O 为坐标原点),则 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$,且 y 越大,$\sin\alpha$ 的值越大. ( )

(5)终边落在 y 轴上的角的正切值为 0. ( )

◆ 知识点二 正弦、余弦与正切在各象限、坐标轴上的符号

①$\sin\alpha>0\Leftrightarrow\alpha$ 的终边在________________上.

②$\sin\alpha<0\Leftrightarrow\alpha$ 的终边在________________上.

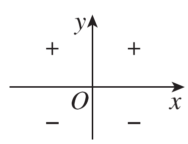
③$\cos\alpha>0\Leftrightarrow\alpha$ 的终边在________________上.

④$\cos\alpha<0\Leftrightarrow\alpha$ 的终边在________________上.

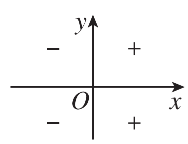
⑤$\tan\alpha>0\Leftrightarrow\alpha$ 的终边在________________上.

⑥$\tan\alpha<0\Leftrightarrow\alpha$ 的终边在________________上.

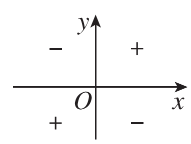
上述结果用下图直观表示：



sin α



cos α



tan α

记忆口诀:一全正、二正弦、三正切、四余弦.

其含义是在第一象限各三角函数值全为正,在第二象限只有正弦值为正,在第三象限只有正切值为正,在第四象限只有余弦值为正.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)若 α 是三角形的内角,则必有 $\sin\alpha>0$. ( )

(2)若 α 是第二象限角,且 $P(x,y)$ 是其终边与半径为 1 的圆的交点,则 $\cos\alpha=-x$. ( )

(3)若 $\sin\alpha>0$,则 α 是第一或第二象限角. ( )

(4)若 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha>0$,则角 α 为第一象限角. ( )

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　任意角的三角函数定义及应用

[探索] 已知角 α 的终边上异于原点的点 P 的坐标为 (x,y)，点 P 的位置不同会影响角 α 的三角函数值吗？

例 1 (1)已知 α 是第二象限角，$P(x,8)$ 为其终边上的一点，且 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，则 $x=$ (　　)

A. -6　　B. ±6

C. $\pm\frac{32}{3}$　　D. $-\frac{32}{3}$

(2)[2025·河南平顶山高一期中] 以坐标原点为顶点，x 轴的正半轴为始边的角 α，其终边落在直线 $y=x$ 上，则有 (　　)

A. $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\sin\alpha+\cos\alpha=\pm\sqrt{2}$

D. $\tan\alpha=\pm1$

变式 (1)[2024·重庆西南大学附中高一月考] 已知角 θ 的终边经过点 $M(m,4-m)$，且 $\tan\theta=\frac{1}{2}$，则 $m=$ (　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1

C. 2　　D. $\frac{8}{3}$

(2)已知点 A 的坐标为 $(1,\sqrt{3})$，将 OA 绕坐标原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 至 OP，则点 P 的坐标为 ________.

[素养小结]

(1)已知角 α 的终边在直线上，求 α 的三角函数值时，通常在角 α 的终边上任选一点 $P(x,y)(x\neq0)$，点 P 到原点的距离为 $r(r>0)$，则 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

(2)利用三角函数的定义求值时应注意的问题

①当角 α 的终边上点的坐标以参数形式给出时，要根据问题的实际情况对参数进行分类讨论；

②当终边在直线上时，因为角 α 的终边是射线，所以应分两种情况进行讨论.

◆ 探究点二　三角函数值的符号的判断

例 2 (1)已知点 $P(\cos\theta,\tan\theta)$ 位于第二象限，则 θ 的终边位于 (　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

(2)(多选题)下列四个式子的符号为负的是 (　　)

A. $\sin 5$　　B. $\cos100°-\sin100°$

C. $-\tan10$　　D. $\sin1+\cos1$

变式 (1)已知 $0\leqslant\alpha<2\pi$，若 $\sin\alpha<0$ 且 $\cos2\alpha<0$，则 α 的取值范围是 (　　)

A. $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$　　B. $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

C. $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{5\pi}{4}<\alpha<\frac{7\pi}{4}$

(2)[2024·辽宁葫芦岛一中高一月考] 已知 $\sin\theta\cdot\tan\theta<0$，且 $\cos\theta\cdot\sin\theta<0$，则 $\frac{\theta}{2}$ 是 (　　)

A. 第一或第二象限角

B. 第二或第三象限角

C. 第一或第三象限角

D. 第二或第四象限角

[素养小结]

判断给定角的三角函数值正负的要点

(1)准确确定三角函数值中角的终边所在象限是基础；

(2)准确记忆三角函数在各象限的符号是解决这类问题的关键，可以利用口诀“一全正、二正弦、三正切、四余弦”来记忆.

课堂评价

知识评价　素养形成

1. [2024·湖南株洲高一月考] 设角 α 的终边经过点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，则 $\cos\alpha=$ (　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

2. 已知角 θ 的顶点与坐标原点重合，始边与 x 轴的正半轴重合，若 $A(1,y)$ 是角 θ 的终边上的一点，且 $\sin\theta=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，则 $y=$ （　）

A. -3　　B. 3

C. -1　　D. 1

3. ［2024·河南信阳高一期末］若 $\sin\alpha\tan\alpha>0$，且 $\cos\alpha\tan\alpha<0$，则 α 是 （　）

A. 第一象限角　　B. 第二象限角

C. 第三象限角　　D. 第四象限角

4. ［2025·上海青浦区高一期中］已知 $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$，则 $x=$________.

5. 已知 $\alpha\in(0,2\pi)$，角 α 的终边上有一点 $M(\cos 2,\cos 2)$，则 $\alpha=$________.

7.2.2　单位圆与三角函数线

【学习目标】

1. 能够准确画出正弦线、余弦线和正切线；
2. 能够通过三角函数线求解、判断函数值的正负，解三角不等式等问题.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ 知识点一　单位圆

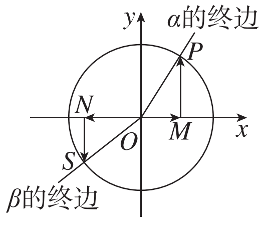
一般地，在平面直角坐标系中，坐标满足________的点组成的集合称为单位圆. 因此，如果角 α 的终边与单位圆的交点为 P，则 P 的坐标为________，这就是说，角 α 的余弦和正弦分别等于角 α 终边与单位圆交点的________和________.

◆ 知识点二　三角函数线

1. 正弦线和余弦线的表示

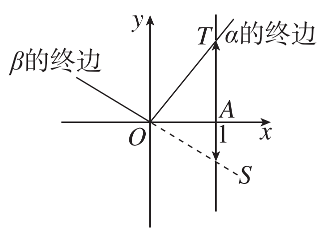
(1)概念：如图所示，如果过角 α 终边与单位圆的交点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M，则 $\overrightarrow{OM}$ 可以直观地表示 $\cos\alpha$：$\overrightarrow{OM}$ 的方向与 x 轴的正方向相同时，表示 $\cos\alpha$ 是________，且 $\cos\alpha=|\overrightarrow{OM}|$；$\overrightarrow{OM}$ 的方向与 x 轴的正方向相反时，表示 $\cos\alpha$ 是________，且 $\cos\alpha=-|\overrightarrow{OM}|$. 习惯上，称 $\overrightarrow{OM}$ 为角 α 的余弦线. 类似地，图中的 $\overrightarrow{MP}$ 可以直观地表示 $\sin\alpha$，因此称 $\overrightarrow{MP}$ 为角 α 的正弦线.

(2)几何意义：利用角的正弦线和余弦线，可以直观地看出角的正弦和余弦的信息. 如图，角 β 的余弦线是 $\overrightarrow{ON}$，正弦线是 $\overrightarrow{NS}$，由此可看出 $\cos\beta<0$，$\sin\beta<0$，而且还可以看出 $|\cos\beta|>|\cos\alpha|$，$|\sin\alpha|>|\sin\beta|$.



2. 正切线的表示

(1)概念：如图所示，设直线 $x=1$ 与 x 轴交于点 A，角 α 的终边与直线 $x=1$ 交于点 T，则 $\overrightarrow{AT}$ 可以直观地表示 $\tan\alpha$，因此________称为角 α 的正切线.



(2)几何意义：当角的终边在第二、三象限或 x 轴的负半轴上时，终边与直线 $x=1$ 没有交点，但终边的反向延长线与直线 $x=1$ 有交点，而且交点的纵坐标也正好是角的正切值，因此图中角 β 的正切线为________.

3. 三角函数线的特征

正弦线、余弦线和正切线都称为____________.

(1)方向：正弦线由 x 轴上的垂足指向 α 的终边与单位圆的交点；余弦线由原点指向 x 轴上的垂足；正切线由切点(单位圆与 x 轴正半轴的交点)指向切线与 α 的终边(或其反向延长线)的交点.

(2)书写：起点(比如点 A)在前，终点(比如点 B)在后，写为 $\overrightarrow{AB}$.

(3)正负：三条三角函数线的正负可简记为“同向为正，反向为负”(与坐标轴正方向相同为正，与坐标轴正方向相反为负).

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)若角 α 的余弦线的长度为0，则它的正弦线的长度为1. （　）

(2)在单位圆中，有相同正弦线的角相等. （　）

(3)三角函数线的长度等于三角函数值. (　　)

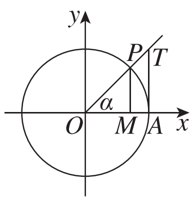
(4)当角 α 的终边在 x 轴上时，正弦线、正切线都变成一个点，此时角 α 的正弦值和正切值都为 0. (　　)

(5)具有相同正切线的两个角的终边在同一条直线上. (　　)

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　作三角函数线



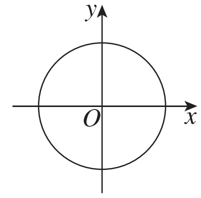
[探索](1)如图，已知点 A 是单位圆与 x 轴正半轴的交点，角 α 的终边与单位圆的交点为 P，$PM\perp x$ 轴于点 M，过点 A 作单位圆的切线交角 α 的终边于点 T，则角 α 的正弦线、余弦线、正切线分别是____________.

(2)三角函数线的方向与三角函数值有何关系？

例 1　作出下列各角的正弦线、余弦线和正切线.

(1)$\frac{\pi}{3}$；(2)$-\frac{2\pi}{3}$.

变式　在单位圆中，满足 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 的正弦线有几条？试在图中标出.



[素养小结]

(1)作正弦线、余弦线时，首先找到角的终边与单位圆的交点，然后过此交点作 x 轴的垂线，得到垂足，从而得到正弦线和余弦线.

(2)作正切线时，应从点 $A(1,0)$ 引单位圆的切线，与角的终边(或反向延长线)交于点 T，即可得到正切线 $\overrightarrow{AT}$. 要特别注意，当角的终边在第二或第三象限时，应将角的终边反向延长，再按上述作法来作正切线.

◆ 探究点二　利用三角函数线比较三角函数值的大小

[探索]　利用三角函数线可知，不等式 $|\sin x|\geqslant|\cos x|$ 的解集为____________.

例 2　利用三角函数线比较下列各组数的大小.

(1)$\sin\frac{2\pi}{3}$与 $\sin\frac{4\pi}{5}$；

(2)$\cos\frac{2\pi}{3}$与 $\cos\frac{4\pi}{5}$；

(3)$\tan\frac{2\pi}{3}$与 $\tan\frac{4\pi}{5}$.

变式 利用三角函数线比较下列各组数的大小关系正确的是________.(填序号)

①$\sin\frac{\pi}{6}=\sin\frac{7\pi}{6}$;②$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}$;

③$\tan\frac{\pi}{8}>\tan\frac{3\pi}{8}$;④$\sin\frac{3\pi}{5}>\sin\frac{4\pi}{5}$.

[素养小结]

当利用三角函数线比较大小时,首先需要在直角坐标系的单位圆中作出所要比较的角的三角函数线,其次在比较大小时,既要注意三角函数线的长短,又要注意三角函数线的方向.

◆ 探究点三 利用三角函数线证明、求解三角不等式

例3 试利用三角函数线证明:当$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$时,$\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

例4 在单位圆中画出满足下列条件的角α的终边的范围,并由此写出满足条件的角α的取值集合.

(1)$\sin\alpha\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(2)$\cos\alpha\leqslant-\frac{1}{2}$.

变式 (1)已知$0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$,利用三角函数线证明$\alpha-\beta>\sin\alpha-\sin\beta$.

(2)已知$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$,利用正弦线比较$\sin\alpha$和$\sin\beta$的大小.

[素养小结]

(1)利用三角函数线证明不等式时,一般先根据条件作出三角函数线,再进行证明,证明过程中往往需要借助三角形和扇形的面积.

(2)三角函数线的主要作用是解三角不等式、比较大小及求函数的定义域,在求三角函数定义域时,一般转化为不等式(组),因此必须牢固掌握三角函数线的画法及意义.

拓展 利用三角函数线,确定使不等式$-\frac{1}{2}\leqslant\cos\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$成立的$\theta$的取值范围.

课堂评价

知识评价 素养形成

1. 关于三角函数线,下列说法中正确的是 ( )

A. 对任何角都能作出正弦线、余弦线和正切线

B. 有的角正弦线、余弦线和正切线都不存在

C. 任何角的正弦线、正切线总是存在,但是余弦线不一定存在

D. 任何角的正弦线、余弦线总是存在,但是正切线不一定存在

2. 若角 α 的正弦线的长度为 1，则角 α 的终边在（　　）

A. x 轴上　　B. y 轴上

C. x 轴的正半轴上　　D. y 轴的正半轴上

3. 已知 $a=\sin 0.1, b=0.1, c=\tan 0.1$，则（　　）

A. $c>b>a$　　B. $b>c>a$

C. $b>a>c$　　D. $a>c>b$

4. 下面四个不等式中正确的是（　　）

A. $\sin\frac{\pi}{5}<\sin\frac{4\pi}{5}$　　B. $\sin\frac{\pi}{5}>\cos\frac{4\pi}{5}$

C. $\cos\frac{\pi}{5}<\cos\frac{4\pi}{5}$　　D. $\tan\frac{\pi}{5}<\tan\frac{4\pi}{5}$

5. 若 $-\frac{3\pi}{4}<\alpha<-\frac{\pi}{2}$，则 $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ 的大小关系是__________.（用“<”连接）

7.2.3　同角三角函数的基本关系式

【学习目标】

会运用同角三角函数的基本关系式进行三角函数式的化简、求值和证明.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ 知识点一　同角三角函数的基本关系

1. 平方关系：__________.

2. 商数关系：__________.

这就是说，同一个角 α 的正弦、余弦的______等于 1，商等于角 α 的______.

【诊断分析】1. 判断正误.（请在括号中打“√”或“×”）

(1) $\tan 90^\circ=\frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ}$.（　　）

(2) 当角 α 的终边与坐标轴重合时，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\neq 1$.（　　）

(3) 因为平方关系对任意角都成立，所以 $\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$ 也成立.（　　）

(4) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 对一切 $\alpha\in\mathbf{R}$ 恒成立，而 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 仅对 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 成立.（　　）

(5) 应用同角三角函数的基本关系可以在已知角的某一个三角函数值及角的终边所在象限的情况下，唯一的确定其余两个三角函数值.（　　）

2. $\sin^2\alpha=\sin\alpha^2$ 成立吗？

◆ 知识点二　同角三角函数的基本关系式的常用变形

基本关系式的变形公式：

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\begin{cases}\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha,\\ \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha,\\ \sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha},\\ \cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha},\\ (\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm 2\sin\alpha\cos\alpha\end{cases}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha,\\ \cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}\end{cases}\left(\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right)$$

【诊断分析】判断正误.（请在括号中打“√”或“×”）

(1) 当 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ 时，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$.（　　）

(2) 当 $\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$ 时，$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}$.（　　）

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　已知一个三角函数值求另外两个三角函数值

[探索] 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，那么能否认为角 α 的终边上有异于原点的点 P，点 P 的坐标为 $(2,1)$，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}, \cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$？为什么？

例 1 (1)已知 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$,α 是第三象限角,则 $\cos\alpha=$ ( )

A. $-\frac{4}{5}$ B. $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$

C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{3}{4}$

(2)已知 $\cos\alpha=\frac{8}{17}$,求 $\tan\alpha$ 的值.

(3)[2024·广西贵港高一期末] 已知 α 为第四象限角,且 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$,求 $\cos\alpha$ 的值.

变式 (多选题)下列结论中能成立的是 ( )

A. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 且 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\tan\alpha=2024$ 且 $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{2024}$

C. $\tan\alpha=1$ 且 $\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\sin\alpha=1$ 且 $\tan\alpha\cdot\cos\alpha=1$

[素养小结]

利用同角三角函数的基本关系式解决给值求值问题的方法:

(1)当已知角 α 的某一种三角函数值,求角 α 的另两种三角函数值时,要注意公式的合理选择,一般先选用平方关系,再选用商数关系.

(2)当角 α 的终边所在的象限已经确定,求另两种三角函数值时,只有一组结果;当角 α 的终边所在的象限不确定,求另两种三角函数值时,应分类讨论,一般有两组结果.

◆ 探究点二 "弦值"转化为"切值"

[探索] (1)表达式 $\frac{\sin x-2\cos x}{\sin x+\cos x}$ 如何将弦化成切?

(2)表达式 $\sin^2x-2\cos^2x$ 是否也能够将弦化成切?那么结合上例,怎样的表达式能够将弦化成切?

例 2 (1)[2025·山西晋中高一期末] 已知 $\tan\alpha=-2$,则 $\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{2\cos\alpha-\sin\alpha}=$ ( )

A. $-\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{4}$

C. $-\frac{4}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

(2)[2024·湖南平江三中高一月考] 已知 $\tan\alpha=2$,则 $\sin\alpha\cos\alpha$ 的值为 ( )

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

变式 (1)已知 $\tan\theta=2$,则 $1+\sin\theta\cos\theta=$ ( )

A. $\frac{7}{3}$ B. $\frac{7}{5}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{5}{3}$

(2)[2025·广东汕头高一期中] 已知 $\frac{\tan\alpha}{\tan\alpha-1}=-1$,则 $\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+2=$ ( )

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{12}{5}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{13}{5}$

[素养小结]

化切求值的方法技巧:

(1)已知 $\tan\alpha=m$,可以求 $\frac{a\sin\alpha+b\cos\alpha}{c\sin\alpha+d\cos\alpha}$ 或 $\frac{a\sin^2\alpha+b\sin\alpha\cos\alpha+c\cos^2\alpha}{d\sin^2\alpha+e\sin\alpha\cos\alpha+f\cos^2\alpha}$ 的值.求值时,将分子分母同时除以 $\cos\alpha$ 或 $\cos^2\alpha$,则可化成关于 $\tan\alpha$ 的式子,从而达到求值的目的.

(2)对于 $a\sin^2\alpha+b\sin\alpha\cos\alpha+c\cos^2\alpha$ 的求值,可看成分母是 1,利用 $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ 进行代替后,分子分母同时除以 $\cos^2\alpha$,得到关于 $\tan\alpha$ 的式子,从而达到求值的目的.

◆ **探究点三　$\sin\alpha\pm\cos\alpha$ 与 $\sin\alpha\cos\alpha$ 的关系**

[探索] $1\pm2\sin\alpha\cos\alpha=$ ________________ $=$ ________.

例 3 已知 $-\pi<x<0$，$\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$.

(1)求 $\sin x\cos x$ 的值，并指出角 x 所处的象限；

(2)求 $\sin x-\cos x$ 的值；

(3)求 $\tan x$ 的值.

变式 (多选题)[2024·江苏扬州新华中学高一期末] 已知 $\alpha\in(0,\pi)$，且 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$，则下列结论正确的是　　(　　)

A. $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$　　B. $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{12}{25}$

C. $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{7}{5}$　　D. $\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{25}{12}$

[素养小结]

$\sin\alpha+\cos\alpha$，$\sin\alpha\cos\alpha$，$\sin\alpha-\cos\alpha$ 三个式子中，已知其中一个，可以求其他两个，即“知一求二”，它们的关系是 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha$，$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha$，$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-4\sin\alpha\cos\alpha$，$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$.

◆ **探究点四　三角函数式的化简**

例 4 化简：$\sin^2\alpha\cdot\tan\alpha+\cos^2\alpha\cdot\frac{1}{\tan\alpha}+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

变式 化简：$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\tan\alpha-\sin\alpha}{\tan\alpha+\sin\alpha}}$(其中 α 为第二象限角).

[素养小结]

解答此类题目的关键在于公式的灵活运用，化简过程中常用的方法有：①利用同角三角函数的基本关系及常用变形；②对于含高次的三角函数式，往往借助因式分解化简.

◆ **探究点五　三角函数式的证明**

例 5 求证：$\frac{\sin x}{1+\cos x}-\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{2(\sin x-\cos x)}{1+\sin x+\cos x}$.

变式 (1)求证：$\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha+1}{\sin\alpha+\cos\alpha-1}=\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\alpha\neq\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right)$.

(2)求证：$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta=1$.

[素养小结]

(1)证明简单的三角恒等式的思路：

①从一边开始，证明它等于另一边；

②证明左、右两边等于同一个式子；

③用作差法，证明等式两边之差等于零.

(2)证明三角恒等式的常用技巧及遵循的原则：

①常用技巧：切化弦、整体代换、"1"的代换等.

②遵循的原则：由繁到简，变异为同.

课堂评价 知识评价 素养形成

1. 已知$\tan\alpha=2\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则$\sin\alpha=$ ( )

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ B. $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

C. $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

2. 已知$\dfrac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{5\cos\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{5}{16}$，则$\tan\alpha=$ ( )

A. 0 B. 1

C. $-\dfrac{1}{3}$ D. -3

3. [2024·湖南长沙高一期中] 若$\sin\alpha\tan\alpha>0$，且$\cos\alpha\tan\alpha>0$，则α是 ( )

A. 第一象限角 B. 第二象限角

C. 第三象限角 D. 第四象限角

4. 若α是三角形的一个内角，且$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$，则该三角形的形状为 ( )

A. 钝角三角形 B. 锐角三角形

C. 直角三角形 D. 无法确定

5. 若$0<\alpha<\pi$，且$3\sin\alpha=1+\cos\alpha$，则$\tan\alpha=$________.

7.2.4 诱导公式

第1课时 诱导公式(一)

【学习目标】

1. 理解诱导公式①②③④的推导过程；
2. 能应用角的旋转对称思想推导诱导公式；
3. 能运用有关诱导公式解决一些三角函数的求值、化简和证明问题.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ 知识点一 角α与$\alpha+k\cdot2\pi(k\in\mathbf{Z})$的三角函数值之间的关系

1. 终边关系：角α与$\alpha+k\cdot2\pi(k\in\mathbf{Z})$的终边________.

2. 诱导公式①：

$\sin(\alpha+k\cdot2\pi)=$________$(k\in\mathbf{Z})$；

$\cos(\alpha+k\cdot2\pi)=$________$(k\in\mathbf{Z})$；

$\tan(\alpha+k\cdot2\pi)=$________$(k\in\mathbf{Z})$.

上述公式①的作用：可以把绝对值大于2π的任意角的三角函数值问题转化为________角的同名三角函数值问题.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)任何角θ都可以写成$\alpha+2k\pi,0\leqslant\alpha<2\pi,k\in\mathbf{Z}$的形式，且$\alpha+2k\pi$就是角$\alpha$旋转$2\pi$的整数倍后得到的. ( )

(2)所有终边相同的角的三角函数值都相等. ( )